

สนุกกับ บันจี้จัมป์



ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4



เวลา 3-4 ชั่วโมง



สาระสำคัญ

บันจี้จัมป์ (bungee jump) หรือการกระโดดบันจี้เป็นกิจกรรมท้าทายชนิดหนึ่งที่ต้องกระโดดลงจากที่สูง เช่น สะพาน อาคาร โดยผูกเชือกที่มีความยืดหยุ่นไว้ที่ข้อเท้า ดังนั้น การออกแบบเชือกสำหรับบันจี้จัมป์จำเป็นต้องใช้ความรู้เกี่ยวกับสมบัติของวัสดุที่ใช้ในการทำเชือก เช่น ความแข็งแรงทนทาน และสภาพยืดหยุ่นของเชือก และยังต้องใช้ความรู้ด้านการเปลี่ยนรูปพลังงาน กล่าวคือ ในการกระโดดจากจุดปล่อย พลังงานศักย์โน้มถ่วงจะเปลี่ยนเป็นพลังงานจลน์ และจะเปลี่ยนเป็นพลังงานศักย์ยืดหยุ่นในที่สุด ทำให้เกิดแรงกระทำต่อเชือกและตัวผู้กระโดดซึ่งส่งผลต่อการยืดและการขาดของเชือก ดังนั้น ก่อนการกระโดดจึงต้องรู้ความสูงจากจุดกระโดดถึงพื้น และต้องชั่งน้ำหนักตัวของผู้กระโดดเพื่อคำนวณแรงที่เกิดขึ้นและระยะที่เชือกยืดออกขณะกระโดดได้อย่างถูกต้องเหมาะสมและไม่เกิดอันตรายต่อผู้กระโดด



ตัวชี้วัดตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน/ผลการเรียนรู้

วิทยาศาสตร์	คณิตศาสตร์	เทคโนโลยี*
1. ทดลองและอธิบายความสัมพันธ์ระหว่างแรงกับการเคลื่อนที่ของวัตถุในสนามโน้มถ่วง และนำความรู้ไปใช้ประโยชน์	1. ใช้ความรู้เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมในการคาดคะเนระยะทางและความสูง	1. สร้างสิ่งของเครื่องใช้หรือวิธีการตามกระบวนการเทคโนโลยีอย่างปลอดภัย

หมายเหตุ: *ตัวชี้วัด เทคโนโลยี (T) ในที่นี้จะรวมตัวชี้วัดสาระการออกแบบและเทคโนโลยี และสาระเทคโนโลยีสารสนเทศและการสื่อสาร ในขณะที่วิศวกรรมศาสตร์ (E) ไม่ได้ปรากฏในหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน แต่กระบวนการออกแบบเชิงวิศวกรรม สามารถเทียบเคียงได้จากกระบวนการเทคโนโลยีในตัวชี้วัดสาระการออกแบบและเทคโนโลยี



กรอบแนวคิด





จุดประสงค์ของกิจกรรม

ประยุกต์ใช้ความรู้เรื่องแรง การเปลี่ยนรูปพลังงาน สภาพยืดหยุ่น และกฎของฮุค ในการออกแบบและสร้างแบบจำลองบันจี้จัมป์



วัสดุอุปกรณ์

ที่	รายการ	จำนวนต่อกลุ่ม
1	วัสดุประเภทเชือกที่ยึดได้ เช่น สายรัดของ ยางยืด ยาว 2 เมตร	ชนิดละ 1 เส้น
2	วัสดุประเภทเชือกที่ยึดไม่ได้ เช่น เชือกป่าน เชือกปอ เชือกฟาง ยาว 3 เมตร	ชนิดละ 1 เส้น
3	ไคลโนมิเตอร์	1 อัน
4	เครื่องชั่งสปริง 0-50 นิวตัน	1 เครื่อง
5	ไม้บรรทัด ไม้เมตร หรือ สายวัด	1 อัน/เส้น
6	ถุงทรายมวล 500 กรัม	2 ถุง



แนวการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

ขั้นระบุปัญหา

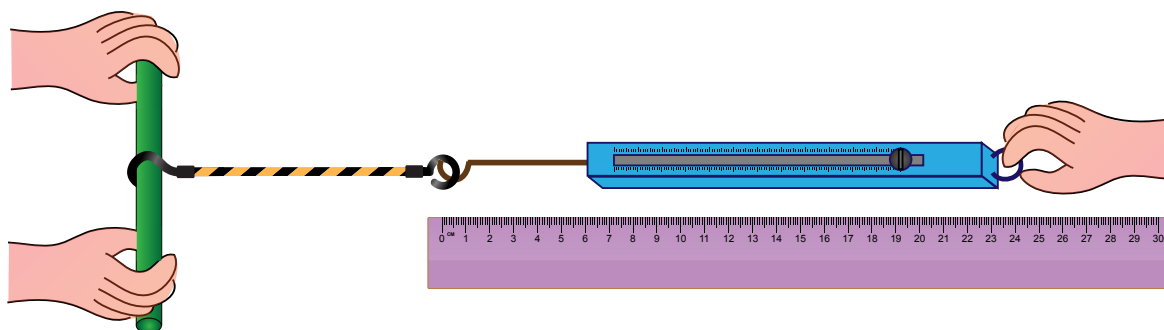
- ครูตั้งคำถามหรือให้นักเรียนอภิปรายเพื่อสำรวจความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับบันจี้จัมป์ เช่น นักเรียนรู้จักกิจกรรมบันจี้จัมป์หรือไม่ มีลักษณะอย่างไร
- ครูให้นักเรียนศึกษาวิดีโอที่เกี่ยวกับบันจี้จัมป์ จากนั้นให้นักเรียนร่วมกันอภิปรายในประเด็น ดังนี้
 - ความรู้วิทยาศาสตร์ด้านใดบ้างที่เกี่ยวข้องกับบันจี้จัมป์
แนวคำตอบ สมบัติของวัสดุ การเปลี่ยนรูปพลังงาน แรงโน้มถ่วงของโลก
 - นักเรียนต้องคำนึงถึงปัจจัยอะไรบ้าง เพื่อให้เล่นบันจี้จัมป์สนุกและปลอดภัย
แนวคำตอบ ความยืดหยุ่นของเชือก น้ำหนักของเชือก น้ำหนักของผู้กระโดด ความยาวเชือก และ ความสูงของจุดปล่อยบันจี้จัมป์)
- ครูกำหนดสถานการณ์ต่อไปนี้
 “นักเรียนเป็นวิศวกรในบริษัทแห่งหนึ่งที่ถูกมอบภารกิจบันจี้จัมป์ว่าจ้างให้ออกแบบเชือกสำหรับกิจกรรมบันจี้จัมป์ให้มีความยาวเหมาะสมกับความสูงของหอกระโดดและน้ำหนักของผู้กระโดด บริษัทจึงทำการคัดเลือกกลุ่มวิศวกรที่มีความรู้ความสามารถเพื่อทำงานนี้ โดยจัดให้มีการแข่งขันภายในบริษัทเพื่อสร้างแบบจำลองบันจี้จัมป์ที่ทำให้ถุงทรายมวล 1,000 กรัม (ถุงทราย 2 ถุง ที่มัดติดกัน) ตกจากระดับความสูงที่กำหนด โดยให้ถุงทรายอยู่ใกล้พื้นมากที่สุดและไม่กระทบพื้น และจำลองว่าพื้นบริเวณที่ถุงทรายตกนั้นเป็นพื้นน้ำทำให้ไม่สามารถวัดความสูงจากจุดปล่อยได้โดยตรง ซึ่งการแข่งขันครั้งนี้กำหนดให้ใช้เชือกที่เป็นวัสดุที่ยึดได้และยึดไม่ได้อย่างละ 1 เส้น”

ขั้นรวบรวมข้อมูลและแนวคิดที่เกี่ยวข้องกับปัญหา

4. ครูให้นักเรียนสืบค้นข้อมูล ร่วมกันศึกษาและอภิปรายในประเด็นต่อไปนี้
 - การเคลื่อนที่ของวัตถุต่าง ๆ ภายใต้แรงโน้มถ่วงของโลก
 - การเปลี่ยนรูปพลังงานและการเชื่อมโยงความรู้นี้กับบันจิจัมป์ (ใบความรู้ที่ 1 เรื่อง การเปลี่ยนรูปพลังงาน)
 - การทดสอบความยืดหยุ่นของวัสดุพอลิเมอร์ต่าง ๆ เช่น ยาง เชือก ที่มีความเหมาะสมเพื่อเป็นข้อมูลในการออกแบบและเลือกใช้เชือกสำหรับบันจิจัมป์ (ใบความรู้ที่ 1 เรื่องการเปลี่ยนรูปพลังงาน เรื่อง สภาพยืดหยุ่น)
 - การหาความสูงโดยใช้ไคลโนมิเตอร์และกฎของไซน์ (ใบความรู้ที่ 2 เรื่องกฎของไซน์)
5. ครูให้นักเรียนแต่ละกลุ่มทำการทดลองเพื่อหาค่าคงตัวสปริงของเชือก (วัสดุที่ยืดได้) ที่จะนำมาใช้อุปกรณ์
 1. เครื่องชั่งสปริง
 2. วัสดุที่ต้องการหาค่าคงตัวสปริง
 3. ไม้บรรทัด ไม้เมตร หรือ สายวัด

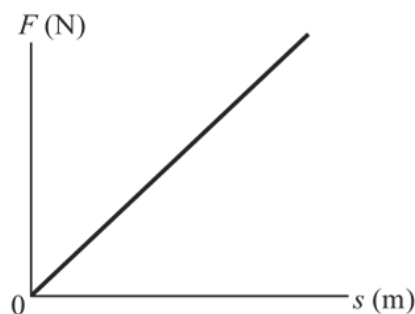
แนวทางการทดลอง

- 5.1 ปรับเครื่องชั่งสปริงให้เริ่มต้นที่สเกลศูนย์ ยึดปลายข้างหนึ่งของเชือกไว้แล้วใช้เครื่องชั่งสปริงเกี่ยวปลายอีกข้างหนึ่ง วางเชือกและเครื่องชั่งสปริงในแนวนานกับไม้บรรทัด ดังแสดงในภาพ ให้ปลายสุดของเชือกด้านที่เกี่ยวกับเครื่องชั่งสปริงอยู่ตรงขีดศูนย์ของไม้บรรทัด



- 5.2 ออกแรงดึงเชือกให้ยืดออกครั้งละ 1 เซนติเมตร บันทึกระยะที่เชือกยืดออกจากตำแหน่งสมดุลกับขนาดของแรงดึง
- 5.3 เขียนกราฟระหว่างระยะที่เชือกยืดออกกับขนาดของแรงดึง โดยให้ขนาดของแรงดึง F (หน่วยนิวตัน) อยู่ในแกนตั้ง และระยะที่เชือกยืดออก s (หน่วยเมตร) อยู่ในแกนนอน โดยครูอาจมีแนวคำถามเพื่อให้นักเรียนอภิปรายดังนี้
 - กราฟที่ได้จากการทดลองมีลักษณะอย่างไร
 - ความสัมพันธ์ระหว่างระยะที่เชือกยืดออกกับขนาดของแรงดึงเป็นอย่างไร
 - ความชันของกราฟมีค่าเท่าใดและค่านี้แทนปริมาณอะไร

6. ครูและนักเรียนร่วมกันอภิปรายผลการทดลองจนได้ข้อสรุปดังนี้
- กราฟที่ได้จากการทดลองมีลักษณะเป็นแนวตรงผ่านจุดกำเนิด ดังภาพ



กราฟระหว่างระยะยืดจากตำแหน่งสมดุลกับแรงดึง

- แรงดึงแปรผันตรงกับระยะที่เชือกยืดออก หรือ $F \propto s$
 - ความชันของกราฟระหว่างระยะที่เชือกยืดออกกับขนาดของแรงดึงเป็นค่าคงตัว เรียกว่า ค่าคงตัวสปริงของเชือก (k)
7. ครูให้นักเรียนหาความสูงของจุดปล่อยบันจีจัมป์โดยใช้โคลโนมิเตอร์และกฎของไซน์

ขั้นตอนแบบวิธีการแก้ปัญหา

8. ครูให้นักเรียนแต่ละกลุ่มร่วมกันออกแบบบันจีจัมป์ที่จะทำให้ถุงทรายตกลงใกล้พื้นให้มากที่สุดและไม่กระทบพื้นตามแนวคิด ข้อมูลที่ได้สืบค้น และจากการคำนวณและทดลอง โดยต้องเลือกใช้เชือกที่ยืดได้และยืดไม่ได้อย่างละ 1 เส้น

ขั้นวางแผนและดำเนินการแก้ปัญหา

9. แต่ละกลุ่มวางแผนการทำงานและดำเนินการสร้างบันจีจัมป์ ตามที่ได้ออกแบบไว้

ขั้นทดสอบ ประเมินผล และปรับปรุงแก้ไขวิธีการแก้ปัญหาหรือชิ้นงาน

10. ครูให้นักเรียนทดสอบโดยทำการแข่งขันบันจีจัมป์
11. ครูให้นักเรียนประเมินว่าสามารถออกแบบแบบจำลองบันจีจัมป์ได้ใกล้เคียงมากน้อยเพียงใด และเสนอแนะวิธีการปรับปรุง

ขั้นนำเสนอวิธีการแก้ปัญหา ผลการแก้ปัญหา หรือชิ้นงาน

12. ครูให้นักเรียนนำเสนอและร่วมกันอภิปรายแนวคิดและวิธีการออกแบบจำลองบันจีจัมป์ ตลอดจนวิธีการปรับปรุงแก้ไขชิ้นงาน
13. ครูนำอภิปรายเพื่อให้ได้ข้อสรุปเกี่ยวกับความรู้ที่เกี่ยวข้องกับการสร้างแบบจำลองบันจีจัมป์

ข้อเสนอแนะเพิ่มเติมเพื่อการสืบค้น

- ประวัติความเป็นมาของการกระโดดจากที่สูงของคนในชนเผ่าต่าง ๆ จนกลายมาเป็นบันจีจัมป์ในปัจจุบัน
- การเปลี่ยนแปลงทางสภาพร่างกายและจิตใจขณะกระโดดบันจีจัมป์
- การเลือกใช้เชือกประเภทต่าง ๆ และความยาวที่แตกต่างกัน มีผลต่อบันจีจัมป์หรือไม่



การวัดประเมินผล

ตัวอย่างตารางบันทึกคะแนน

กลุ่ม	ระดับคะแนนของรายการที่ประเมิน				คะแนนรวม (100 คะแนน)
	ผลงาน (40 คะแนน)	การนำเสนอผลงาน (20 คะแนน)	การใช้กระบวนการ ออกแบบเชิงวิศวกรรม (20 คะแนน)	การบูรณาการความรู้ (STEM) (20 คะแนน)	
1					
2					
3					
4					
5					

เกณฑ์การให้คะแนน (100 คะแนน)

รายการ ประเมิน	ดีมาก (4)	ดี (3)	พอใช้ (2)	ควรปรับปรุง (1)
ผลงาน	บันจี้จัมป์ที่สร้างขึ้น เป็นไปตามเงื่อนไขที่ กำหนด และสอดคล้อง กับวัตถุประสงค์ โดย ระยะที่ถูกรายตกนั้น วัดจากพื้นได้ไม่เกิน 30 เซนติเมตร	บันจี้จัมป์ที่สร้างขึ้นเป็น ไปตามเงื่อนไขที่กำหนด และสอดคล้องกับ วัตถุประสงค์ โดยระยะ ที่ถูกรายตกนั้นวัดจาก พื้นได้ระหว่าง 30-50 เซนติเมตร	บันจี้จัมป์ที่สร้างขึ้น เป็นไปตามเงื่อนไขที่ กำหนด และสอดคล้อง กับวัตถุประสงค์ โดย ระยะที่ถูกรายตกนั้น วัดจากพื้นได้เกินกว่า 50 เซนติเมตร	ถูกรายกระทบพื้น
การนำเสนอ ผลงาน	รูปแบบการนำเสนอ สื่อความหมายให้ผู้อื่น เข้าใจถูกต้อง ชัดเจน อธิบายเหตุผลของ แนวคิดได้	รูปแบบการนำเสนอ สื่อความหมายให้ผู้อื่น เข้าใจได้ชัดเจน อธิบาย เหตุผลของแนวคิดได้ถูก ต้องบางส่วน	รูปแบบการนำเสนอสื่อ ความหมายให้ผู้อื่น เข้าใจได้ไม่ชัดเจน อธิบายเหตุผลของ แนวคิดได้ถูกต้อง บางส่วน	รูปแบบการนำเสนอสื่อ ความหมายไม่ถูกต้อง ไม่ชัดเจน อธิบายเหตุผล ของแนวคิดไม่ได้

รายการประเมิน	ระดับ	ดีมาก (4)	ดี (3)	พอใช้ (2)	ควรปรับปรุง (1)
การใช้กระบวนการออกแบบเชิงวิศวกรรม		มีการใช้กระบวนการออกแบบเชิงวิศวกรรม มีการสืบค้นข้อมูล และแสดงถึงการใช้ข้อมูลมาเป็นพื้นฐานการตัดสินใจในการออกแบบ	มีการใช้กระบวนการออกแบบเชิงวิศวกรรม มีการสืบค้นข้อมูล แต่ไม่ได้นำมาใช้เป็นพื้นฐานการตัดสินใจในการออกแบบ	มีการใช้กระบวนการออกแบบเชิงวิศวกรรม แต่ไม่มีการสืบค้นข้อมูล	ขาดการใช้การออกแบบเชิงวิศวกรรม
การบูรณาการความรู้ (STEM)		สามารถอธิบายความรู้ทางด้าน วิทยาศาสตร์ คณิตศาสตร์ และเทคโนโลยีที่นำมาใช้ในการออกแบบผลงานได้ ชัดเจนและถูกต้องครบทั้ง 3 ด้าน	สามารถอธิบายความรู้ที่เกี่ยวข้องกับการออกแบบผลงานได้ ชัดเจนและถูกต้อง 2 ด้าน	สามารถอธิบายความรู้ที่เกี่ยวข้องกับการออกแบบผลงานได้ ชัดเจนและถูกต้องเพียงด้านเดียว	ไม่สามารถอธิบายความรู้ที่เกี่ยวข้องกับการออกแบบผลงานได้

หมายเหตุ

1. การประเมิน “การใช้กระบวนการออกแบบเชิงวิศวกรรม” จะประเมินจากข้อมูลที่นักเรียนตอบในใบกิจกรรม ซึ่งมีขั้นตอนการดำเนินงานที่เป็นไปตามกระบวนการออกแบบเชิงวิศวกรรม
2. การประเมินในส่วนของ “การบูรณาการความรู้ (STEM)” จะประเมินจากข้อมูลการตอบคำถามในใบกิจกรรม กรณีที่นักเรียนไม่ได้ตอบคำถาม ผู้สอนอาจพิจารณาให้คะแนนจากข้อมูลที่นักเรียนอธิบายเหตุผลในการออกแบบและเลือกวัสดุอุปกรณ์ในการสร้างบันจี้จัมป์ได้

ข้อเสนอแนะในการจัดกิจกรรม

1. ก่อนทำกิจกรรมนี้ นักเรียนควรจะมีความรู้พื้นฐานในเรื่องสภาพยืดหยุ่นของวัสดุ การเปลี่ยนรูปพลังงาน โดยครูสามารถจัดกิจกรรมได้โดยใช้ใบความรู้ที่ 1 และ 2 โดยให้นักเรียนศึกษาและอภิปรายก่อนทำกิจกรรมนี้
2. ครูควรแนะนำให้ให้นักเรียนศึกษาหรือทบทวนเนื้อหาจากใบความรู้ล่วงหน้าเพื่อให้กิจกรรมสามารถดำเนินการเสร็จสิ้นภายในเวลาที่กำหนดอย่างมีประสิทธิภาพ เนื่องจากเวลา 3-4 ชั่วโมง ตามที่กำหนดนั้นเป็นเวลาสำหรับการทำกิจกรรมเท่านั้น

สื่อและแหล่งเรียนรู้

1. วิดีทัศน์เรื่องบันจี้จัมป์
2. ใบความรู้ที่ 1 เรื่อง การเปลี่ยนรูปพลังงาน
3. ใบความรู้ที่ 2 เรื่อง กฎของฮุค

แนวคำตอบใบกิจกรรม

1. ระบุปัญหาหรือสถานการณ์

แนวคำตอบ สร้างแบบจำลองบันจีจัมป์ โดยทำให้ถุงทรายมวล 1000 กรัม ถูกปล่อยที่ระดับความสูงที่กำหนดให้ ตกลงมาให้ใกล้พื้นมากที่สุดโดยที่ถุงทรายไม่กระทบพื้น โดยใช้วัสดุที่ยึดได้และไม่ยืดอย่างละ 1 เส้น และไม่สามารถวัดความสูงจากจุดปล่อยได้โดยตรงเนื่องจากบริเวณจุดตกเป็นพื้นน้ำ

2. ความรู้ที่เกี่ยวข้องกับปัญหา

แนวคำตอบ ความรู้เรื่องสมบัติของวัสดุ สภาพยืดหยุ่น หลักการของแรง การเปลี่ยนรูปพลังงาน และกฎของฮุคเพื่อการออกแบบและสร้างแบบจำลองบันจีจัมป์

3. การทดลองหาความสัมพันธ์ระหว่างระยะที่เชือกยืดออกกับขนาดของแรงที่ใช้ดึงเชือก

ให้นักเรียนศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างระยะที่เชือกยืดออก (s) มีหน่วยเป็นเมตร กับแรงที่ใช้ดึงเชือก (F) มีหน่วยเป็นนิวตัน โดยให้นักเรียนออกแบบตารางบันทึกผลการทดลอง และหาค่าคงตัวสปริง (k) ของเชือก จากกราฟความสัมพันธ์ดังกล่าว

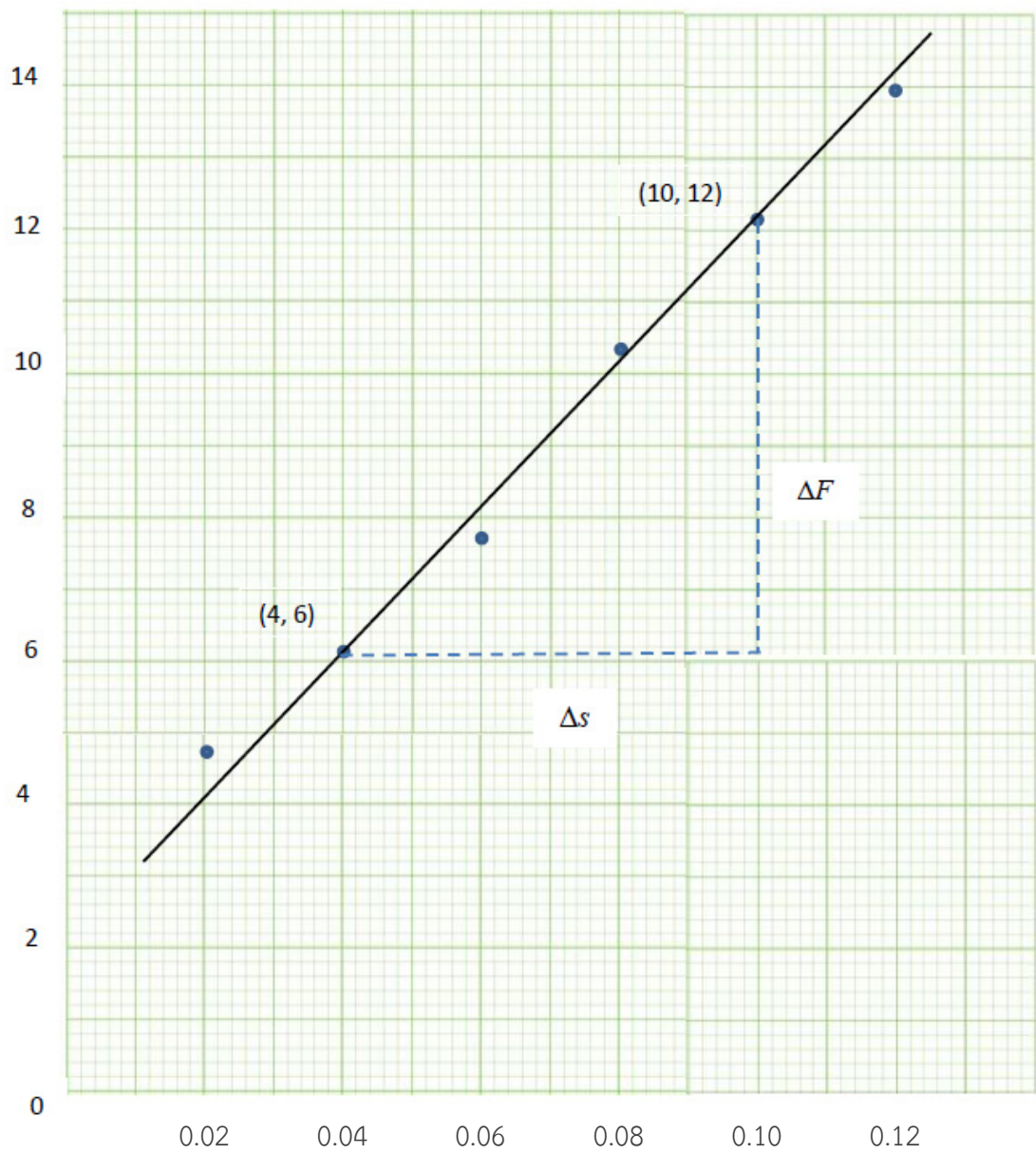
แนวคำตอบ

ตารางบันทึกผลการทดลอง

ระยะที่เชือกยืดออก s (cm)	แรงที่ใช้ดึงเชือก F (N)
2	4.6
4	6.0
6	7.6
8	10.2
10	12.0
12	13.8

กราฟความสัมพันธ์ระหว่างระยะที่เชือกยืดออก (s) กับขนาดของแรงที่ใช้ดึง (F)

แรงดึงเชือก (นิวตัน)



ระยะที่เชือกยืดออก (เมตร)

วิธีการคำนวณหาค่าคงตัวสปริงในเส้นเชือก (k)

$$k = \frac{\Delta F}{\Delta s} = \frac{12 \text{ N} - 6 \text{ N}}{0.10 \text{ m} - 0.04 \text{ m}} = 100 \text{ N/m}$$

4. การหาความสูงของจุดปล่อยบันจีจัมป์

แนวคำตอบ

ให้ CD เป็นความสูงของจุดปล่อยบันจีจัมป์ส่วนที่เหนือระดับสายตา

จุด A เป็นจุดที่ผู้วัดมองจุดปล่อยบันจีจัมป์ในครั้งแรก

จุด B เป็นจุดที่ผู้วัดมองจุดปล่อยบันจีจัมป์ในครั้งหลัง

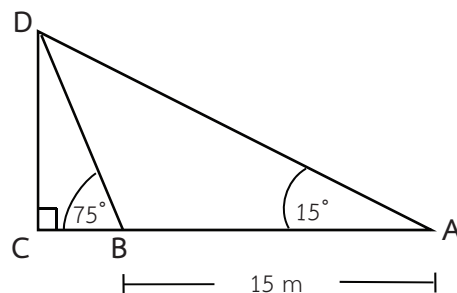
และระยะ AB เท่ากับ 15 เมตร

เนื่องจาก $\angle CAD = 15^\circ$ และ $\angle CBD = 75^\circ$

จะได้ $\angle ADB = 60^\circ$

พิจารณา $\triangle ABD$ จากกฎของไซน์

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } \frac{\sin 15^\circ}{BD} &= \frac{\sin 60^\circ}{AB} \\ BD &= (15\text{m}) \frac{\sin 15^\circ}{\sin 60^\circ} \end{aligned}$$



พิจารณา $\triangle BCD$ จากกฎของไซน์

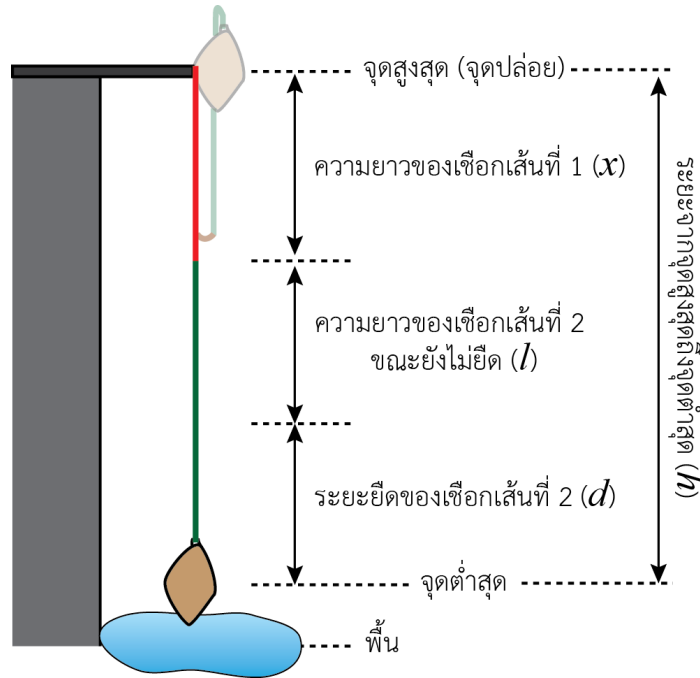
$$\begin{aligned} \text{จะได้ } \frac{\sin 75^\circ}{CD} &= \frac{\sin 90^\circ}{BD} \\ CD &= BD \sin 75^\circ \\ CD &= (15\text{m}) \frac{\sin 15^\circ}{\sin 60^\circ} \sin 75^\circ \\ &= (15\text{m}) \frac{(0.2588)}{(0.8660)} (0.9659) \approx 4.33\text{m} \end{aligned}$$

เนื่องจากความสูงจากพื้นถึงระดับสายตาของผู้วัดเป็น 1.50 เมตร

ดังนั้นจุดปล่อยบันจีจัมป์สูงจากพื้นประมาณ 4.33 เมตร + 1.50 เมตร หรือประมาณ 5.83 เมตร

หมายเหตุ ในกรณีที่ผู้เรียนใช้ความสูงของผู้วัดมามากจนอาจทำให้เกิดความคลาดเคลื่อน ดังนั้นผู้สอนอาจจะแนะนำให้ผู้เรียนวัดความสูงจากปลายเท้าถึงระดับสายตาแล้วนำมาใช้ในการคำนวณ เพื่อให้เกิดความคลาดเคลื่อนน้อยที่สุด

5. การคำนวณหาความยาวของเชือกที่ใช้
แนวคำตอบ



จากกฎการอนุรักษ์พลังงานกล

พลังงานศักย์โน้มถ่วงที่จุดสูงสุด = พลังงานศักย์ยืดหยุ่นที่จุดต่ำสุด

$$mgh = \frac{1}{2}kd^2$$

กำหนดให้ m คือ มวลของถุงทราย มีค่าเท่ากับ 1.0 กิโลกรัม

g คือ ขนาดความเร่งโน้มถ่วง มีค่าเท่ากับ 9.8 เมตรต่อวินาที²

h คือ ระยะจากจุดปล่อยจนถึงปลายสุดของเส้นเชือก

d คือ ระยะยืดของเชือกเส้นที่ยืดได้

กำหนดระยะจากจุดต่ำสุดถึงพื้น เท่ากับ 0.30 เมตร และความสูงจากพื้นถึงจุดปล่อยที่วัดได้มีค่าเท่ากับ 5.83 เมตร

จะได้ระยะ เท่ากับ 5.83 เมตร - 0.30 เมตร = 5.53 เมตร

แทนค่าในสมการ

$$mgh = \frac{1}{2}kd^2$$

$$(1.0 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2)(5.53 \text{ m}) = \frac{1}{2}(100 \text{ N/m})d^2$$

$$d = 1.04 \text{ m}$$

ดังนั้น ระยะยืดของเชือกเส้นที่ยืดได้เท่ากับ 1.04 เมตร และระยะจากจุดปล่อยถึงปลายสุดของเส้นเชือกซึ่งเป็นจุดต่ำสุด มีค่าเท่ากับ $h = x + l + d$

เมื่อ x คือ ความยาวของเชือกเส้นที่ไม่ยึด
 l คือ ความยาวเชือกเส้นที่ยึดได้ขณะที่ยังไม่ยึด มีค่าเท่ากับ 2.0 เมตร
 d คือ ระยะยึดของเชือกเส้นที่ยึดได้ มีค่าเท่ากับ 1.04 เมตร

แทนค่าในสมการ
$$h = x + l + d$$

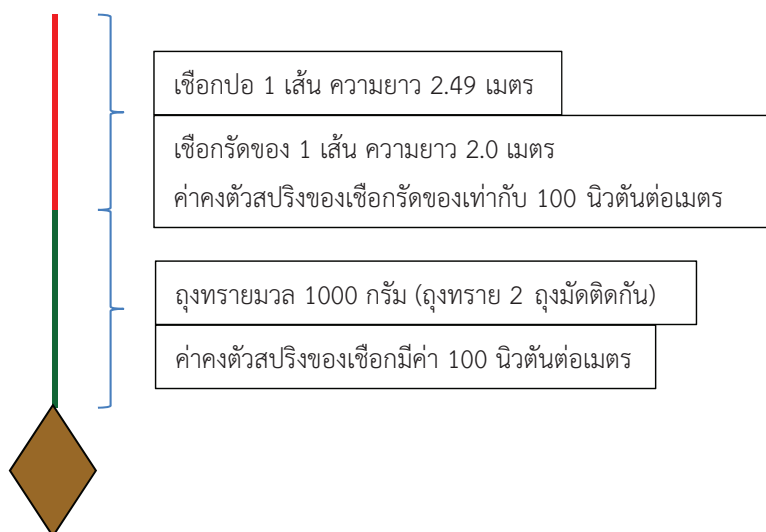
$$5.53 \text{ m} = x + 2.0 \text{ m} + 1.04 \text{ m}$$

$$x = 2.49 \text{ m}$$

ดังนั้น ความยาวของเชือกเส้นที่ไม่ยึดเท่ากับ 2.49 เมตร

6. ภาพร่างการออกแบบชิ้นงาน

(ให้นักเรียนออกแบบชิ้นงานพร้อมระบุประเภทของเชือกที่เลือกใช้ ความยาว และค่าคงตัวสปริงของเชือก)



7. ผลการทดสอบแบบจำลองบันจีจัมป์คะแนน

8. วิธีการปรับปรุงชิ้นงาน

แนวคำตอบ เวลาปล่อยถุงทรายจะต้องยึดแขวนให้ตรง และอยู่ในระดับเดียวกับจุดวัดความสูงเพื่อป้องกันความคลาดเคลื่อน

9. ประเมินผลชิ้นงาน

แนวคำตอบ บันจีจัมป์ที่สร้างขึ้นเป็นไปตามเงื่อนไขที่กำหนด สามารถทำให้ถุงทรายตกลงมาใกล้พื้นมากที่สุดโดยไม่กระทบพื้น

แนวคำตอบคำถามท้ายกิจกรรม

1. จากการทดลอง ปัจจัยใดบ้างที่มีผลให้ถุงทรายตกลงมาใกล้พื้นที่สุดโดยไม่กระทบพื้น

แนวคำตอบ เงื่อนไขของการทำกิจกรรมนี้คือ การทำให้ถุงทรายตกลงมาใกล้พื้นที่สุดโดยไม่กระทบพื้น ดังนั้น ปัจจัยที่นักเรียนต้องคำนึงถึงคือ ชนิดและความยาวของวัสดุทั้งเส้นที่ยึดได้และไม่ยึด โดยความยาวนั้นต้องเหมาะสมกับน้ำหนักของถุงทรายและความสูงของจุดปล่อย

2. นักเรียนสามารถนำความรู้ที่ได้จากกิจกรรมนี้ไปประยุกต์ใช้ในชีวิตประจำวันได้อย่างไรบ้าง

แนวคำตอบ นักเรียนสามารถนำความรู้เรื่องนี้ไปประยุกต์ใช้ในการเล่นกีฬาบันจี้จัมป์ โดยคำนึงถึงปัจจัยต่าง ๆ ที่สำคัญ เช่น ความยาวเชือก น้ำหนักของผู้เล่น ความสูงของจุดปล่อยบันจี้จัมป์ เพื่อให้การเล่นบันจี้จัมป์สนุกและปลอดภัย นอกจากนี้ยังรู้จักวิธีการหาความสูงของสิ่งต่าง ๆ โดยใช้คลิโนมิเตอร์ ซึ่งสามารถวัดความสูงได้จากจุดวัด 2 จุดในแนวระดับ โดยไม่จำเป็นต้องเข้าไปถึงสิ่งที่ต้องการวัดความสูง

3. นักเรียนได้บูรณาการความรู้ทางวิทยาศาสตร์ คณิตศาสตร์ เทคโนโลยีและวิศวกรรมในการออกแบบและสร้างแบบจำลองบันจี้จัมป์อย่างไร

แนวคำตอบ สิ่งสำคัญที่สุดของการเล่นบันจี้จัมป์ก็คือความปลอดภัย การออกแบบและสร้างแบบจำลองเชือกสำหรับบันจี้จัมป์โดยอาศัยหลักการทางวิทยาศาสตร์เกี่ยวกับพลังงานและสภาพยืดหยุ่นนั้นไม่เพียงพอ จำเป็นต้องใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์เกี่ยวกับฟังก์ชันตรีโกณมิติในการหาความสูงที่แน่นอนของตำแหน่งที่จะปล่อยถุงทราย รวมทั้งการออกแบบและเทคโนโลยีในการเลือกวัสดุที่เหมาะสม เพื่อนำข้อมูลทั้งหมดมาประมวลผลในการสร้างเชือกเพื่อให้เกิดความปลอดภัยสูงสุด

ใบความรู้ที่ 1

เรื่อง การเปลี่ยนรูปพลังงาน

พลังงาน (energy) คือ ความสามารถในการทำงาน เราไม่สามารถมองเห็นหรือจับต้องพลังงานได้ แต่สามารถรับรู้ได้จากผลของพลังงานนั้น ๆ พลังงานจลน์ (kinetic energy) เป็นพลังงานของวัตถุที่กำลังเคลื่อนที่ ส่วนพลังงานศักย์ (potential energy) เป็นพลังงานของวัตถุที่เกี่ยวข้องกับตำแหน่งหรือรูปร่างอันเป็นผลมาจากแรงที่กระทำต่อวัตถุนั้น ทั้งพลังงานจลน์และพลังงานศักย์รวมเรียกว่า พลังงานกล (mechanical energy)

1. พลังงานจลน์

พลังงานจลน์เป็นพลังงานในวัตถุที่กำลังเคลื่อนที่หรือมีความเร็ว กำหนดสัญลักษณ์ E_k แทนพลังงานจลน์ v แทนความเร็ว และ m แทนมวลของวัตถุ จะได้ว่า

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

หน่วยของพลังงานจลน์คือ กิโลกรัม เมตร² ต่อวินาที² ($\text{kg m}^2/\text{s}^2$) ซึ่งเท่ากับ นิวตัน เมตร (Nm) หรือ จูล (J)

2. พลังงานศักย์

พลังงานศักย์เป็นพลังงานที่ถูกเก็บสะสมไว้ในวัตถุต่าง ๆ เนื่องจากตำแหน่งหรือภาวะของวัตถุ พลังงานศักย์ของวัตถุซึ่งอยู่ในที่สูงจากระดับอ้างอิง ซึ่งเกิดจากแรงโน้มถ่วงของโลกที่กระทำต่อวัตถุ เรียกว่า พลังงานศักย์โน้มถ่วง (gravitational potential energy) ส่วนพลังงานศักย์ของสปริงที่ถูกอัดหรือดึงซึ่งเกิดจากแรงยืดหยุ่นของสปริง เรียกว่า พลังงานศักย์ยืดหยุ่น (elastic potential energy)

ก. พลังงานศักย์โน้มถ่วง

กำหนดสัญลักษณ์ E_p แทนพลังงานศักย์โน้มถ่วง พลังงานศักย์โน้มถ่วงของวัตถุซึ่งอยู่สูงจากระดับอ้างอิงเป็นระยะ h จะมีค่าเป็น

$$E_p = mgh$$

หน่วยของพลังงานศักย์โน้มถ่วงในระบบเอสไอ คือ จูล (J) และเป็นปริมาณสเกลาร์เช่นเดียวกับงานและพลังงานจลน์ จะเห็นว่า ค่าของพลังงานศักย์โน้มถ่วงของวัตถุนั้นขึ้นอยู่กับตำแหน่งของวัตถุเมื่อเทียบกับระดับอ้างอิง

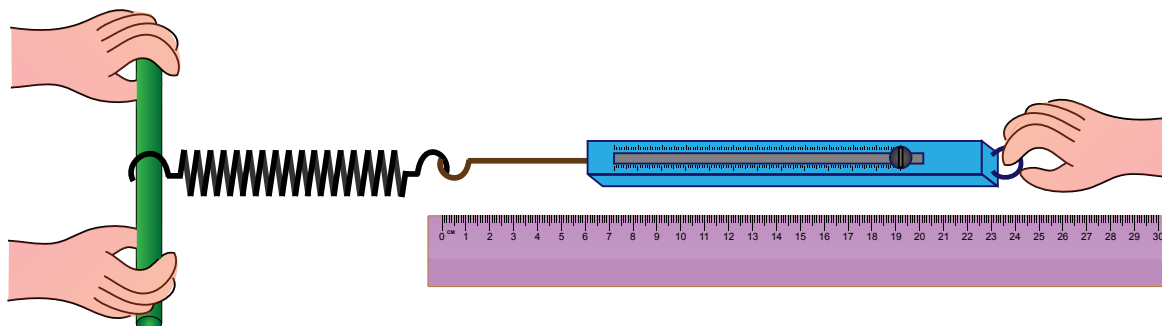
ข. พลังงานศักย์ยืดหยุ่น

ถ้าออกแรงดึงสปริงหรือสิ่งที่คล้ายกับสปริงให้ยืดออกจากตำแหน่งเริ่มต้น จะมีความรู้สึกว่ามีแรงจากสปริงดึงมือ การออกแรงอัดสปริงให้หดเข้าจากตำแหน่งเริ่มต้นก็เช่นเดียวกัน จะรู้สึกว่ามีแรงจากสปริงดันมือ แรงที่มือดึงสปริงกับแรงที่สปริงดึงมือเป็นแรงคู่กิริยา-ปฏิกิริยา แรงที่สปริงดึงหรือดันมือทำให้สปริงเคลื่อนที่กลับสู่ตำแหน่งเริ่มต้น เรียกตำแหน่งเริ่มต้นนี้ว่า ตำแหน่งสมดุล

จากกฎของฮุก (Hooke's law) เมื่อออกแรงดึงสปริงด้วยแรง F จะมีความสัมพันธ์กับ s ซึ่งเป็นระยะที่สปริงยืดออกหรือหดจากตำแหน่งสมดุล ดังสมการ

$$F = ks$$

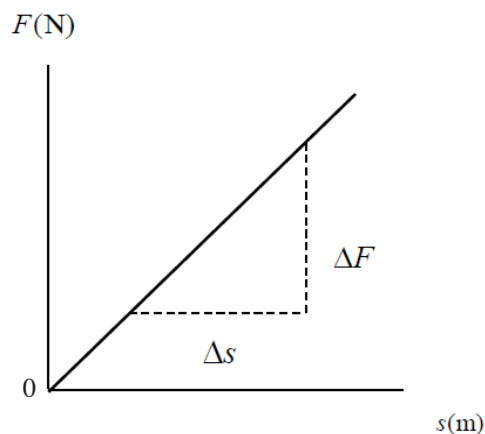
k คือ ค่าคงตัวสปริง (spring constant) หรือค่าคงตัวของแรง (force constant) ซึ่งหมายถึงแรงที่ทำให้สปริงยืดหรือหดต่อความยาวหนึ่งหน่วย มีหน่วย นิวตันต่อเมตร (N/m) โดยค่าคงตัวสปริงของสปริงแต่ละอันจะไม่เท่ากันขึ้นกับความแข็งของสปริง และเป็นค่าคงตัวในช่วงจำกัดช่วงหนึ่ง



ภาพการหาความสัมพันธ์ระหว่างระยะทางที่สปริงยืดออกกับขนาดของแรงที่ใช้ดึงสปริง

ทั้งนี้ เราสามารถหาค่าคงตัวสปริง (k) ได้จากความชันของกราฟระหว่างระยะทางที่สปริงยืดออกกับ ขนาดของแรงที่ใช้ดึง หรือ

$$k = \frac{\Delta F}{\Delta s}$$



ภาพ การหาความชันของกราฟระหว่างระยะยืดจากตำแหน่งสมดุลกับแรงดึงสปริง

กำหนดสัญลักษณ์ E_p แทนพลังงานศักย์ในสปริง ซึ่งเรียกว่า พลังงานศักย์ยืดหยุ่นของสปริง งานของแรงที่ดึงหรือกดสปริงให้มีระยะเปลี่ยนไป s จากตำแหน่งสมดุลมีค่าดังสมการ

$$E_p = \frac{1}{2}ks^2$$

หน่วยของพลังงานศักย์ยืดหยุ่น คือ จูล (J) เช่นเดียวกับหน่วยของงาน

3. สภาพยืดหยุ่น

สภาพยืดหยุ่น (elasticity) เป็นสมบัติของวัสดุที่มีการเปลี่ยนแปลงรูปร่าง เมื่อมีแรงมากระทำและสามารถคืนตัวกลับสู่รูปร่างเดิมเมื่อหยุดออกแรงกระทำ เมื่อดึงสปริงให้ยืดออกจะพบว่าความยาวที่สปริงยืดออกแปรผันตรงกับขนาดของแรงดึง แต่ถ้าเพิ่มแรงดึงสปริงให้ยืดออกไปเรื่อย ๆ อีก เมื่อถึงระยะหนึ่ง จะพบว่าความยาวที่สปริงยืดออกไม่แปรผันตรงกับขนาดของแรงดึง



ก. ก่อนสปริงถูกดึง

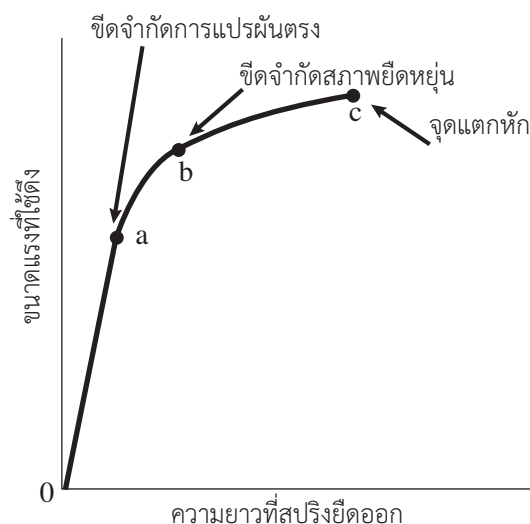


ข. สปริงถูกยืดจนใกล้ขีดจำกัดสภาพยืดหยุ่น



ค. สปริงถูกยืดจนเกินขีดจำกัดสภาพยืดหยุ่น

ภาพ รูปร่างของสปริงเมื่อถูกแรงกระทำ



กราฟความสัมพันธ์ระหว่างความยาวที่สปริงยืดออกกับขนาดของแรงดึง

จากกราฟความสัมพันธ์ระหว่างความยาวที่สปริงยืดออกกับขนาดของแรงดึงแสดงให้เห็นว่า ความยาวที่สปริงยืดออกแปรผันตรงกับขนาดของแรงดึงอยู่ในช่วงแรกเท่านั้น คือ ในช่วง 0a ของเส้นกราฟ ซึ่งการยืดของสปริงจะเป็นไปตามกฎของฮุค หลังจากนั้นความยาวที่สปริงยืดออกจะไม่แปรผันตรงกับขนาดของแรงดึง จุด a ซึ่งเป็นตำแหน่งสุดท้ายที่ความยาวที่สปริงยืดออกแปรผันตรงกับขนาดของแรงดึง เรียกว่า ขีดจำกัดการแปรผันตรง (proportional limit) ถ้าออกแรงดึงสปริงให้ยืดอีกเล็กน้อยจนถึงจุด b เมื่อหยุดออกแรงกระทำ พบว่าสปริงจะกลับไปอยู่ในสภาพเดิม ตำแหน่งสุดท้าย (จุด b) ที่สปริงยืดออกแล้วยังสามารถคืนตัวกลับสู่สภาพเดิมได้เรียกว่า ขีดจำกัดสภาพยืดหยุ่น (elastic limit) จะเห็นว่าเส้นกราฟช่วง 0b เป็นช่วงที่สปริงสามารถคืนตัวสู่รูปร่างเดิมได้ สภาพของวัสดุในช่วง 0b ก็คือสภาพยืดหยุ่น ส่วนช่วงของกราฟตั้งแต่จุด b เป็นต้นไป สปริงเปลี่ยนรูปร่างไปอย่างถาวร ไม่สามารถกลับสู่สภาพเดิม และถ้าดึงต่อไปก็จะถึงจุด c ซึ่งเป็นจุดที่เส้นวัสดุขาด จุดนี้เรียกว่า จุดแตกหัก (breaking point) สภาพของวัสดุในช่วง bc ก็คือ สภาพพลาสติก

4. กฎการอนุรักษ์พลังงานกล

พลังงานกลรวมของระบบจะไม่สูญหาย แต่อาจเปลี่ยนจากพลังงานหนึ่งไปเป็นอีกพลังงานหนึ่ง โดยผลรวมของพลังงานยังคงเดิม ซึ่งเป็นไปตามกฎการอนุรักษ์พลังงานกล (law of conservation of mechanical energy) การอนุรักษ์พลังงานกลจะเกิดขึ้นเมื่อไม่มีแรงภายนอกกระทำต่อวัตถุ ทำให้ผลรวมของพลังงานศักย์และพลังงานจลน์ทุกตำแหน่งมีค่าคงตัว

5. การประยุกต์กฎการอนุรักษ์พลังงานกล

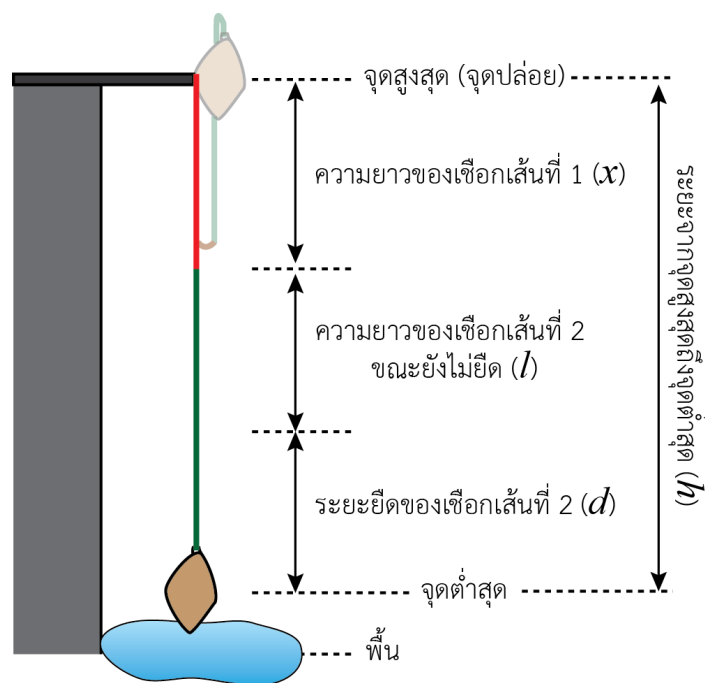
กฎการอนุรักษ์พลังงานกลใช้ในการอธิบายและบรรยายการเคลื่อนที่ของวัตถุ เช่น การเคลื่อนที่แบบวงกลมในระนาบตั้ง การเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย การเคลื่อนที่ภายใต้สนามโน้มถ่วง

เมื่อพิจารณابันจี้จัมป์จำลอง ซึ่งเป็นการปล่อยถุงทรายที่ผูกเข้ากับปลายเชือกจากที่สูง ถ้ากำหนดว่าเชือกที่ใช้เป็นเชือกเบาและไม่มีมวล จะมีพลังงานที่เกี่ยวข้อง คือ พลังงานจลน์และพลังงานศักย์อธิบายได้ ดังนี้ ก่อนปล่อยถุงทรายจะมีเพียงพลังงานศักย์โน้มถ่วงของถุงทรายและเมื่อกระโดดแล้ว ช่วงที่เชือกยังไม่ยืด พลังงานศักย์โน้มถ่วงลดลง และพลังงานจลน์ของถุงทรายเพิ่มขึ้น ช่วงที่เชือกยืดออก จะมีทั้งพลังงานศักย์ยืดหยุ่นของเชือก พลังงานศักย์โน้มถ่วงและพลังงานจลน์ของถุงทราย ขณะเชือกยืดออกมากที่สุด จะมีแต่พลังงานศักย์โน้มถ่วงของผู้กระโดดและพลังงานศักย์ยืดหยุ่นของเชือก ส่วนพลังงานจลน์ของผู้กระโดดเป็นศูนย์ การเปลี่ยนรูปพลังงานเหล่านี้เป็นไปตามกฎการอนุรักษ์พลังงานกล นั่นคือ ณ ตำแหน่งต่าง ๆ พลังงานกลจะมีค่าคงตัว

จากกฎการอนุรักษ์พลังงานกล

พลังงานศักย์โน้มถ่วงที่จุดสูงสุด = พลังงานศักย์ยืดหยุ่นที่จุดต่ำสุด

$$mgh = \frac{1}{2}kd^2$$



ภาพบันจี้จัมป์จำลองและปริมาณต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้อง

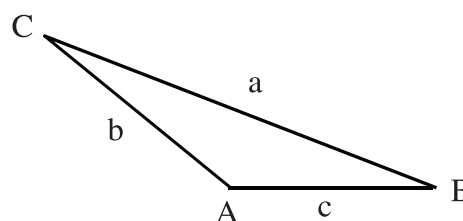
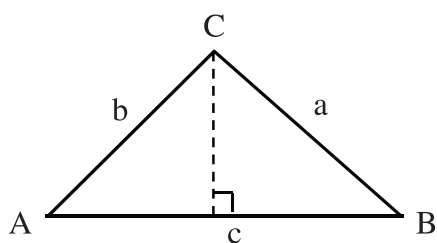
ใบความรู้ที่ 2

เรื่อง กฎของไซน์

ในชีวิตประจำวันเราต้องเกี่ยวข้องกับปริมาณต่าง ๆ มากมาย ความยาวเป็นปริมาณชนิดหนึ่งที่ใช้บ่อยมาก โดยเรียกในชื่อต่าง ๆ เช่น ความสูง ระยะทาง รัศมี เส้นผ่านศูนย์กลาง การหาความยาวข้างต้น อาจทำได้โดยตรงโดยใช้เครื่องมือวัด เช่น ไม้เมตร สายวัด แต่บางครั้งการวัดโดยตรงอาจทำได้ยาก ดังนั้นเราจึงต้องใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์

ฟังก์ชันตรีโกณมิติเป็นฟังก์ชันของจำนวนจริงหรือของมุม สามารถนำมาใช้ในการหาความยาวของด้านและขนาดของมุมของรูปสามเหลี่ยมได้ โดยกล่าวถึงความสัมพันธ์ระหว่างด้านและมุมของรูปสามเหลี่ยมและฟังก์ชันตรีโกณมิติดังนี้

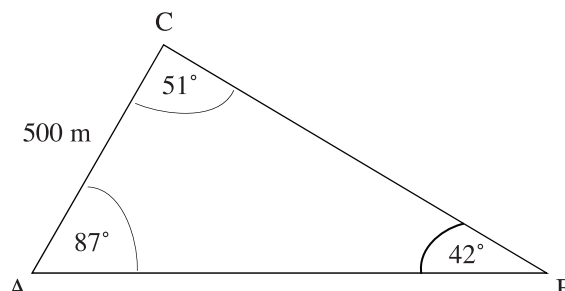
กฎของไซน์ ในรูปสามเหลี่ยม ABC ใด ๆ ถ้า a, b และ c เป็นความยาวของด้านตรงข้ามมุม A, B และ C ตามลำดับ



$$\text{จะได้ } \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

กฎของไซน์ใช้หาความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1 สวนสาธารณะแห่งหนึ่งมีทางเดินโดยรอบเป็นรูปสามเหลี่ยม กำหนดให้เป็น ABC โดย A, B และ C เป็นมุมที่มีค่า 87, 42 และ 51 องศา ตามลำดับ ถ้าทางเดิน AC มีความยาว 500 เมตร ทางเดิน AB และ BC มีความยาวเท่าใด
วิธีทำ เขียนแผนภาพทางเดินรอบสวนสาธารณะได้ดังนี้



จากกฎของไซน์ จะได้ $\frac{\sin A}{BC} = \frac{\sin B}{AC} = \frac{\sin C}{AB}$

แทนค่า $\frac{\sin 87^\circ}{BC} = \frac{\sin 42^\circ}{500\text{m}} = \frac{\sin 51^\circ}{AB}$

จะได้

$$BC = \frac{(500\text{m})(0.9986)}{(0.6691)} \approx 746\text{m}$$

$$AB = \frac{(500\text{m})(0.7771)}{(0.6691)} \approx 581\text{m}$$

คำตอบ ทางเดิน AB มีความยาวประมาณ 581 เมตร และทางเดิน BC มีความยาวประมาณ 746 เมตร

ตัวอย่างที่ 2 เนตรยี่นอยู่บนสนามแห่งหนึ่งมองเห็นยอดเสาธงเป็นมุมเงย 15° องศา แต่เมื่อเดินตรงเข้าไปหาเสาธงอีก 60 เมตร เขามองเห็นยอดเสาธงเป็นมุมเงย 75° องศา ถ้าความสูงจากพื้นถึงระดับสายตาของเนตรมีค่าเป็น 150 เซนติเมตร จงหาความสูงของเสาธง

วิธีทำ ให้ CD เป็นความสูงของเสาธงส่วนที่เหนือระดับสายตา

จุด A เป็นจุดที่เนตรมองยอดเสาธงในครั้งแรก

จุด B เป็นจุดที่เนตรมองยอดเสาธงในครั้งหลัง

และระยะ AB เท่ากับ 60 เมตร

เนื่องจาก $\hat{CAD} = 15^\circ$ และ $\hat{CBD} = 75^\circ$

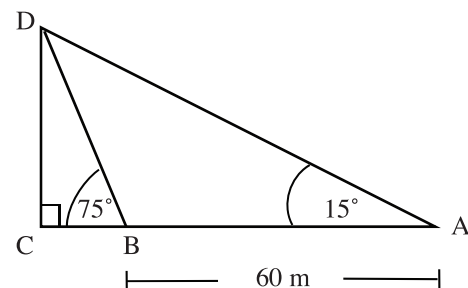
จะได้ $\hat{ADB} = 60^\circ$

พิจารณา $\triangle ABD$ จากกฎของไซน์

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } \frac{\sin 15^\circ}{BD} &= \frac{\sin 60^\circ}{AB} \\ BD &= (60\text{m}) \frac{\sin 15^\circ}{\sin 60^\circ} \end{aligned}$$

พิจารณา $\triangle BCD$ จากกฎของไซน์

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } \frac{\sin 75^\circ}{CD} &= \frac{\sin 90^\circ}{BD} \\ CD &= BD \sin 75^\circ \\ CD &= (60\text{m}) \frac{\sin 15^\circ}{\sin 60^\circ} \sin 75^\circ \\ &= (60\text{m}) \frac{(0.2588)}{(0.8660)} (0.9659) \approx 17.32\text{m} \end{aligned}$$



เนื่องจากความสูงจากพื้นถึงระดับสายตาของเนตรเป็น 1.50 เมตร

ดังนั้นเสาธงสูงประมาณ 17.32 เมตร + 1.50 เมตร หรือประมาณ 18.82 เมตร

คำตอบ ความสูงของเสาธงเท่ากับ 18.82 เมตร